Séance du 14 Mars - Groupe avancé : intégrales impropres.

1 Intégrales et primitives.

1.1 Primitives d'une fonction.

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de la fonction f sur I si F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Propriété. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I, il en est de même pour la fonction : $x \longmapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Démonstration. F est une primitive de f sur I alors F est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle. La fonction G est une somme de fonctions dérivables sur I donc elle est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I.

Propriété. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, la fonction $F - G$ est une fonction constante. En particulier, pour tous a, $b \in I$, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration. F et G sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Donc $F - G$ est dérivable sur I (différence de fonctions dérivables sur I) et pour tout $x \in I$, $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $F(x) - G(x) = k$. Dès lors, on obtient pour tous a, $b \in I$, $F(b) - G(b) = k = F(a) - G(a) \Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Théorème. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit F_0 une autre primitive de f sur I. Donc (par précédemment) il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $F_0(x) = F(x) + k$. De plus, $F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$. La constante k est alors déterminée de manière unique d'où le résultat.

Propriété. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soient F et G deux primitives de f et de g respectivement, sur I. Alors :
1) $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I.
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de f sur I.

Démonstration. Ceci est une conséquence de la linéarité de la dérivée.

Primitives usuelles.

Fonction f	Fonction primitive F (c : constante réelle)	Intervalle I
$x \longmapsto k\,;\, k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto kx + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b\,;\, a, b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto \frac{a}{2}x^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$, $n \neq -1$)	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leq -2$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$x \longmapsto -\frac{1}{x} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln x + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$

Opérations sur les primitives.

On considère dans ce tableau, des fonctions u et v dérivables sur un intervalle I. L'ensemble J est un intervalle.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k constante réelle)	ku	
$u'u^n (n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq 1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ si $n \leq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u \neq 0$ sur I
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	u définie sur I à valeurs dans J et v définie sur J
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I

Exercice 1. Déterminer une primitive (s'il en existe une) sur l'intervalle I donné, de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $I =]-\infty; 1[$.

2) $g : x \longmapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) $h : x \longmapsto \dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

4) $k : x \longmapsto x\sqrt{x^2+3}$ sur $I = \mathbb{R}$.

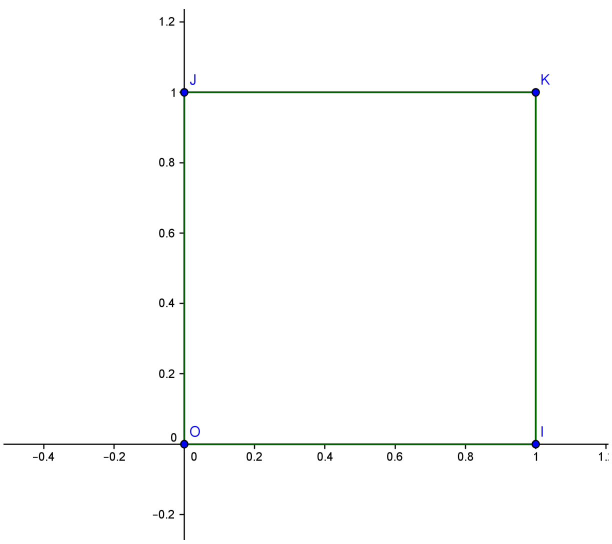
5) $m : x \longmapsto \cos x \times \sin^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1.

1) La fonction $F : x \longmapsto \ln(1-x)$ est une primitive de f sur I car F est dérivable sur I et $F' = f$.
2) La fonction $G : x \longmapsto \sqrt{x^2-2x+5}$ est une primitive de g sur I car G est dérivable sur I et $G' = g$.
3) La fonction $H : x \longmapsto 4\sqrt{x^2-2x+5}$ est une primitive de h sur I car H est dérivable sur I et $H' = h$.
4) La fonction $K : x \longmapsto \dfrac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$ est une primitive de k sur I car K est dérivable sur I et $K' = k$.
5) La fonction $M : x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{3}$ est une primitive de m sur I car M est dérivable sur I et $M' = m$.

1.2 Intégrale et aire.

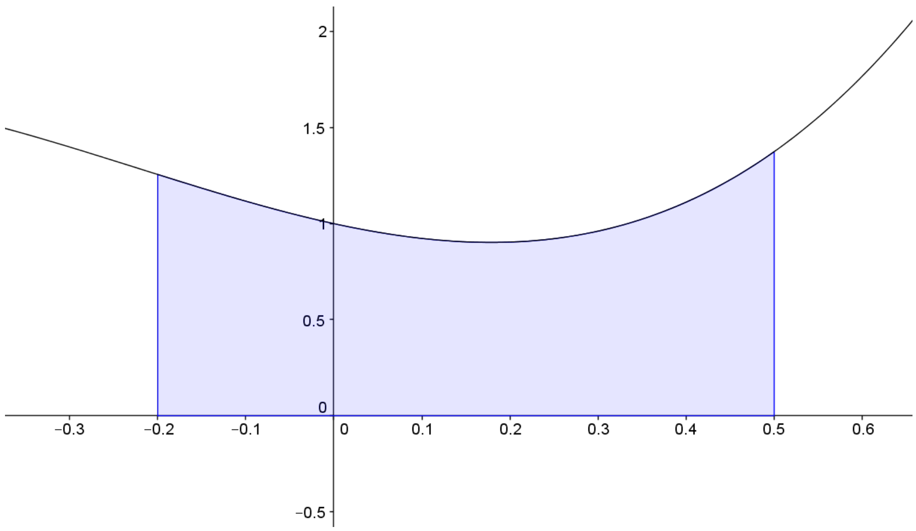
On munit le plan d'un repère orthonormal noté $(O;\vec{i};\vec{j})$ et l'unité d'aire sera l'aire du carré $OIKJ$ suivant :

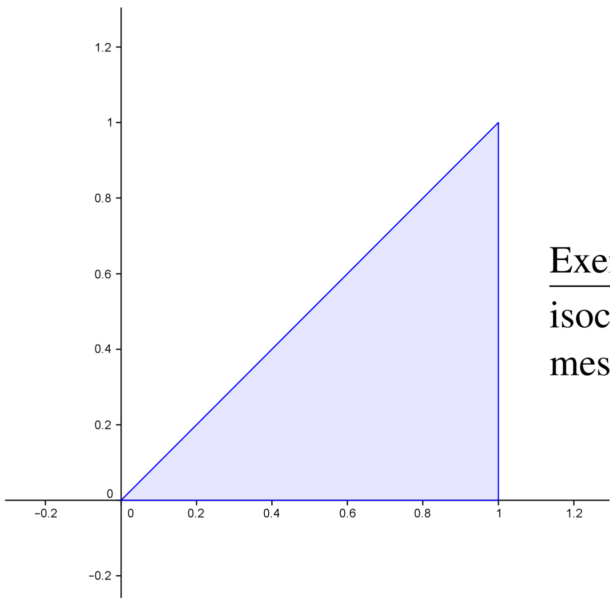


Définition. Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $I = [a;b]$ $(a \leq b)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle : intégrale de a à b de f notée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.
On dit que cette intégrale est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

Si $b \leq a$, on définit l'intégrale de b à a par : $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation graphique.



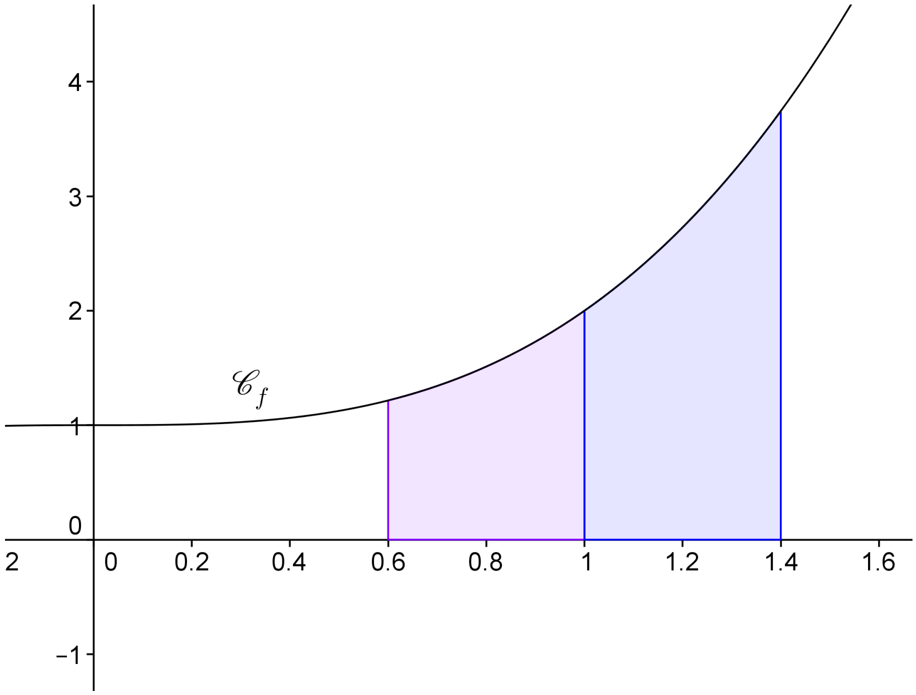


Exemple. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ (aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont une mesure égale à 1).

Propriété : relation de Chasles pour les aires. Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a;b]$. Alors pour tout réel $c \in [a;b]$, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve. Cela provient de l'additivité des aires.

Illustration graphique. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f (définie dans la propriété précédente) dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1.3 Calcul pratique d'une intégrale.

Théorème fondamental. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout réel $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$ et on a : $F(a) = 0$.

Théorème. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$. Précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
De plus, si G est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$.

Démonstration. On a vu dans le théorème précédent que F est une primitive de f et on a $F(a) = 0$ donc F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Soit G une primitive quelconque de f sur $[a;b]$. Alors par précédemment, on a : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème : existence de primitives.
1) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet des primitives sur $[a;b]$.
2) La même assertion est encore valable sur un intervalle I quelconque.

Remarque. Attention, la réciproque du théorème précédent est fausse : il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.

Exemple. Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais $F : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, a et b deux points de l'intervalle I et F une primitive de f sur I. On définit l'intégrale de a à b de f par la formule : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Notation. On reprend les notations de la définitions ci-dessus.
On note : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x$.
La fonction : $x \longmapsto \cos x \sin x$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
Pour calculer cette intégrale, on doit trouver une primitive de la fonction : $x \longmapsto \cos x \sin x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est de la forme uu' avec $u(x) = \sin x$ et $\dfrac{1}{2}u^2$ est une primitive de uu'. Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos x \sin x$ est la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.
On écrit alors : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\sin^2(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{1}{2}\sin^2(0) = \dfrac{1}{2}$.

Propriétés algébriques. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a, b et $c \in I$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.
(1) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(2) Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuves. Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.
(1) On a : $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(2) On a : $\alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha F(b) + \beta G(b) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) = (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x$.

Propriété : conservation de l'ordre. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que : $\forall\, x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve. Soient F et G des primitives des fonctions f et g sur $[a; b]$, respectivement. On a $\forall\, x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$. Donc $\forall\, x \in [a; b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$ donc $F'(x) - G'(x) \leq 0$ ainsi, $(F - G)'(x) \leq 0$ donc la fonction $F - G$ est décroissante sur $[a; b]$. De plus, comme $a \leq b$, on a : $(F - G)(b) \leq (F - G)(a) \Rightarrow F(b) - G(b) \leq F(a) - G(a) \Rightarrow F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Intégrales généralisées (ou impropres).

2.1 Activité.

Exercice 2. Déterminer : $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$; $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$; $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Que remarquez-vous ?

Solution de l'exercice 2. Les fonctions que l'on intègre sont toutes continues sur $]0;+\infty[$ donc chaque intégrale (avec $a>0$) est bien définie.

On a : $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = [2\sqrt{t}]_a^1 = 2-2\sqrt{a}$. De plus, $\lim_{a\to 0^+} 2-2\sqrt{a} = 2$ donc $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$. On notera : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$ et on dira que l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée (ou impropre) convergente. Cette intégrale est impropre uniquement en 0 : « il y a un problème uniquement à la borne 0 »car la fonction : $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est ni définie ni continue en 0.

On raisonne de même pour les autres intégrales.

$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = [2\sqrt{t}]_1^a = 2\sqrt{a}-2$ donc $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

$\int_a^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_a^1 = \ln 1 - \ln a$ donc $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

$\int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^a = \ln a - \ln 1$ donc $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

$\int_a^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t}\right]_a^1 = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{a}$ donc $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

$\int_1^a \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^a = \frac{-1}{a} - \frac{-1}{1}$ donc $\lim_{a\to +\infty}\int_1^a \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

On remarque que certaines limites sont infinies et que cela dépend des bornes des intégrales et des fonctions que l'on intègre.

2.2 Définitions, premières propriétés et exemples.

Définition. On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle $I = [a;b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$ telle que la fonction f soit continue sur chacun des intervalles $]a_i;a_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq p+1)$ et admette une limite finie à droite en a, une limite finie à gauche en b et des limites finies à droite et à gauche en chacun des points a_i $(1 \leq i \leq p)$.

Remarque. Avec les notations de la définition, si f est continue par morceaux sur I, alors on peut définir sa primitive F sur I qui s'annule en a. La fonction F est définie sur $[a;b[$ par : $\forall\, x \in [a;b[$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition. Avec les notations précédentes, on dit que l'intégrale de f sur $[a;b[$ est convergente si la fonction F admet une limite finie quand x tend vers b. Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
Le réel ainsi défini est appelé : intégrale généralisée (ou impropre) convergente de f sur $[a;b[$. Dans le cas où F n'a pas de limite finie en b, on dit que l'intégrale de f sur $[a;b[$ est une intégrale généralisée (ou impropre) divergente.
On a donc en cas de convergence : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On définit de manière analogue l'intégrale généralisée d'une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $]a;b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et continue par morceaux sur cet intervalle : on dit que cette intégrale est une intégrale généralisée convergente si $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie et on note : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. Par abus de langage, l'expression « étudier la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ »sans savoir si cette intégrale converge ou non est un raccourci pour « étudier la convergence de l'intégrale de f sur $]a;b[$ ».

Exemples. On a vu dans l'activité que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée convergente, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée divergente et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée convergente.

Généralisation : intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha \leq 1$.
Preuve. Montrons le premier point (la preuve du deuxième repose sur le même principe).
On considère que $x > 0$ (car on va faire tendre x vers $+\infty$).
Si $\alpha = 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^x = \ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc l'intégrale est divergente.
Si $\alpha \neq 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$.
Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$ donc l'intégrale est convergente.
Si $\alpha < 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$ donc l'intégrale est divergente.

2.3 Méthodes pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée.

Théorème de comparaison.
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur un intervalle $[a;b[$ telles que $f \leq g$.
Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Démonstration. Soient $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G : x \longmapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On a $f \leq g \Rightarrow F \leq G$ (par conservation de l'ordre). La fonction G est croissante (car g est positive sur $[a;b[$) sur $[a;b[$ et a une limite finie quand x tend vers b. Donc G est majorée. Donc F est majorée. De plus, F est croissante, donc F admet une limite finie en b. Ceci prouve la première assertion.
La preuve de la deuxième assertion est claire car la deuxième assertion est la contraposée de la première.

Exercice 3. Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution de l'exercice 3. La fonction : $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
On a pour tout $t \geq 1$, $t^2 \geq t \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$).
Les fonctions $t \longmapsto e^{-t^2}$ et $t \longmapsto e^{-t}$ sont positives sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -e^{-x} + e^{-1} = e^{-1}$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, d'après le théorème précédent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convegente.

Définition. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est négligeable devant g s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que :
$f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in V$.
$\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Remarque. En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ équivaut à $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Définition. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est équivalente à g s'il existe une fonction $\eta : V \to \mathbb{R}$ telle que :
$f(x) = g(x)\eta(x)$ pour tout $x \in V$.

$\lim_{x \to a} \eta(x) = 1$.
On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Remarque. En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ équivaut à $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Théorème de négligeabilité. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur un intervalle $[a; b[$ telles que $f \underset{b}{=} o(g)$. Alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ entraîne celle de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème d'équivalence. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur un intervalle $[a; b[$ telles que $f \underset{b}{\sim} g$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (si l'une converge alors l'autre converge et si l'une diverge alors l'autre diverge).

Exercice 4. Démontrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution de l'exercice 4. La fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}$ est continue sur $[2; +\infty[$. On a :

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - 1}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^4\left(1 - \frac{1}{t^4}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t^4}}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^4 - 1}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. De plus, les fonctions : $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives sur $[2; +\infty[$ donc par le théorème d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}\,\mathrm{d}t$ est de la même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Cette dernière est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$). Donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4 - 1}}\,\mathrm{d}t$ converge.