DIVERS PROBLÈMES D'OLYMPIADE

EMMANUEL LECOUTURIER

1. Combinatoire

Exercice 1. (Shortlist 2013 Exercice C6) En France, on considère un ensemble de ville connectées par des vols à deux sens. On peut voyager entre n'importe quelles deux villes en passant par des villes intermédiaires éventuellement. On suppose que pour chaque ville, il y a au plus n villes à distance exactement 3 de cette ville. Montrer que pour chaque ville, il y a au plus $(\frac{n+1}{2})^2$ villes à distance exactement 4 de cette ville.

Exercice 2. (Shortlist 2012 Exercice C2) Soit $n \geq 1$ un entier. Quel est le nombre maximum de paires disjointes d'éléments différents de $\{1, 2, ..., n\}$ que l'on peut former de sorte que les sommes des différentes paires sont distinctes et $\leq n$?

Exercice 3. (Shortlist 2013 Exercice C1) Soit $n \geq 1$ un entier. Trouver le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante. Pour tout $d \geq 1$ et tout d-uplet de réels $(a_1, ..., a_d)$ avec $0 \leq a_i \leq 1$, si on a $a_1 + a_2 + ... + a_d = n$, alors on peut partitioner les a_i en k groupes tels que la somme dans chaque groupe est ≤ 1.

Exercice 4. (Shortlist 2013 Exercice C2) On colorie 2014 points du plan en bleu et 2015 points en rouge. On suppose qu'aucune droite ne passe pas trois points coloriés distincts. Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ tel qu'on peut tracer n droites dans le plan de telle sorte que deux points de couleurs différentes ne sont pas dans une même région délimitée par ces droites ?

2. Algèbre et arithmétique

Exercice 5. (Shortlist 2013 Exercice A3) Soit $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ telle que :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x)f(y) \geq f(xy)$
- Il existe $a > 1$ tel que $f(a) \geq a$

Montrer que pour tout x, $f(x) = x$.

Exercice 6. (Shortlist 2013 Exercice N2) Soient n et k deux entiers ≥ 1. Montrer qu'il existe des entiers m_1, ..., m_t (pour un $t \geq 1$) tels que :

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = (1 + \frac{1}{m_1})...(1 + \frac{1}{m_t})$$

Exercice 7. (Shortlist 2013 Exercice N3) Prouver qu'il y a une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que le plus grand diviseur premier de $n^4 + n^2 + 1$ est égal au plus grand diviseur premier de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Exercice 8. (Shortlist 2013 Exercice A2) Considérons 2000 nombres réels distincts. Montrer qu'il existe deux paires distinctes (a, b) et (c, d) de ces nombres telles vérifiant $a > b$, $c > d$ et $\mid \frac{a-b}{c-d} - 1 \mid < \frac{1}{10^5}$.