Parimaths - Mathematical Olympiads Club

Codes correcteurs d'erreurs

Séance du samedi 4 octobre 2014

La séance d'aujourd'hui a pour but d'étudier les codes *détecteurs* et *correcteurs* d'erreurs : ces deux notions sont à la base de toutes les communications modernes, depuis le téléphone à la TV (analogique, via la TNT ou l'ADSL) en passant par les algorithmes utilisés pour télécharger puis afficher ou imprimer ce document.

1 Introduction

Exercice 1
Montrer que, pour tout entier k, il existe un code capable de détecter les messages contenant au plus k erreurs. Montrer qu'il existe un code qui est même capable de corriger ces erreurs.

Exercice 2
Montrer que, pour tout entier k, un code est capable de corriger k erreurs si et seulement s'il est de distance au moins $2k+1$.

Exercice 3
Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^\ell$ un code de distance d. Montrer que

$$|\mathcal{A}|^\ell \geq |\mathcal{C}| \sum_{i=0}^{(d-1)/2} \binom{\ell}{i} (|\mathcal{A}|-1)^i.$$

Exercice 4
Un code est dit **parfait** s'il y a égalité dans la somme précédente. Montrer qu'il existe une infinité de codes parfaits.

Exercice 5
Montrer qu'il existe une infinité de codes parfaits de distance 3.

Exercice 6
Blanche-Neige et les sept nains vivent dans leur chaumière dans la forêt. Chaque jour durant seize jours consécutifs, chaque nain a décidé d'aller soit cueillir des baies dans la forêt, soit travailler dans la mine de diamants. Pour toute paire de jours différents (pas nécessairement consécutifs), au moins trois nains ont chacun effectué les deux sortes de travail pendant ces deux jours. Le premier jour, les sept nains ont tous travaillé dans la mine.
Prouver que, parmi ces seize jours, il en existe un lors duquel tous les nains ont cueilli des baies.

2 Codes linéaires

Exercice 7
Montrer que, si $\mathcal{C}$ est un code *linéaire*, alors sa distance est $\min\{d_H(x,0) : x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}\}$.

Exercice 8
Montrer la **borne de Singleton** : si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^\ell$ est un code linéaire de dimension k et de distance d, alors $\ell - k \geq d - 1$.

Exercice 9
On suppose que $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$ et que $k \leq \ell \leq p$, puis on choisit ℓ éléments $e_1, \ldots, e_\ell$ de $\mathbb{F}_p$, deux à deux distincts. Montrer que le code $\mathcal{C} = \{(P(e_1), \ldots, P(e_\ell)) : P \in \mathbb{F}_p[X] \text{ et } \deg P < k\}$ est un code linéaire qui atteint la borne de Singleton.

Exercice 10
31 jeunes mathématiciens sont enfermés dans un cachot au fin fond de l'ENS, pris au piège par un savant fou qui leur propose le défi suivant. Il mettra sur la tête de chaque mathématicien un chapeau blanc ou noir ; chaque mathématicien pourra voir les chapeaux des autres, mais pas le sien, et doit se taire. Puis il fait sortir les mathématiciens un par un et leur demande la couleur de leur chapeau, avant de les diriger vers un second cachot. Lors du transfert, les mathématiciens ont le droit de parler ou de se taire. Cependant, s'ils se taisent tous, ou bien si ne serait-ce qu'un seul d'entre eux parle mais se trompe sur la couleur de son chapeau, il les tue tous ; sinon, il les libère. Cependant, dans sa grande naïveté, il autorise préalablement les mathématiciens à établir une stratégie.
Montrer que les mathématiciens peuvent se débrouiller pour avoir 31 chances sur 32 de survivre.