DIVERS PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE

EMMANUEL LECOUTURIER

Exercice 1. Soit p premier. Prouver que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 2. Soit $n > 1$ un entier. Soit P_n le produit des tous les entiers positifs $x \leq n$ tels que n divise $x^2 - 1$. Trouver le reste de la division de P_n par n.

Exercice 3. Prouver que pour tout nombre premier p, il existe un nombre premier q qui ne divise aucun des nombres $n^p - p$ quand n décrit $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Trouver tous les entiers premiers à l'ensembles des entiers de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$ (pour $n \geq 1$).

Exercice 5. On se donne deux entiers $m < n$, et n tiroirs. Dans chaque tiroir on a un certain nombre (fini) de balles. A chaque étape, on choisit m tiroirs distincts, et on ajoute une balle dans chacun de ces tiroirs.
1) Si $pgcd(m, n) = 1$, montrer qu'on peut arriver à une configuration où il y a le même nombre de balles dans chaque tiroir.
2) Si $pgcd(m, n) > 1$, montrer qu'il existe une configuration de départ à partir de laquelle on ne peut jamais arriver à un état où le nombre de balle est le même dans chaque tiroir.

Exercice 6. Un ensemble d'entiers positifs a_1, ..., a_n est dit linéairement indépendant si pour toute suite b_1, ..., b_n d'entiers > -2, si $a_1b_1 + ... + a_nb_n = 0$ alors $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.
1) Montrer que l'ensemble suivant (en base 2) est linéairement indépendant : $a_1 = 10...0$, $a_2 = 110...0$, ..., $a_n = 1...1$ où il y a n chiffres binaires.
2) Montrer que le plus petit élément d'un ensemble a_1, ..., a_n linéairement indépendant est $\geq 2^{n-1}$.
3) Montrer que si $a_1 = 2^{n-1}$, alors le seul ensemble linéairement indépendant dont le plus grand élément est $\leq 2^n - 1$ est celui de la question 1).

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier et a_1, ..., a_m des entiers distincts de $\{1, 2, ..., n\}$ tels que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., m\}^2$ tel que $a_i + a_j \leq n$, alors il existe k tel que $a_i + a_j = a_k$. Montrer que :

$$\frac{a_1 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier impair. Soient a_1, ..., a_n des entiers. Montrer qu'il existe deux permutations distinctes $(b_1, ..., b_n)$ et $(c_1, ..., c_n)$de $\{1, 2, ..., n\}$ telle que $n!$ divise $(\sum_{i=1}^n a_ib_i) - (\sum_{i=1}^n a_ic_i)$.

Exercice 9. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que $n^2 + 1$ a un diviseur premier $\geq 2n + \sqrt{2n}$.