Cours du Samedi 13 Décembre.

I) Projections et symétries.

1) Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux s.e.v de E.
On dit que F et G sont en somme directe (ou que la somme $F+G$ est directe) si pour tout $x \in F+G$, il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y+z$. On note la somme $F+G$ de la manière suivante : $F \oplus G$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux s.e.v de E.
Alors, F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration. Sens direct : supposons que F et G sont en somme directe. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$.
$0 \in F+G$ (car $F+G$ est un s.e.v de E) et on a : $0 = x + (-x)$ et $x \in F$, $-x \in G$ (car $x \in G$ et G est un s.e.v de E). De plus, $0 = -x + x$ avec $-x \in F$ et $x \in G$. Par unicité de l'écriture de 0 dans $F+G$ (car F et G sont en somme directe), on déduit que : $x = -x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$.
Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0\}$ et montrons que F et G sont en somme directe.
Soit $x \in F+G$. Supposons qu'il existe $y, z \in F$ et $y', z' \in G$ tels que : $x = y + y' = z + z'$. On a donc $y - z = z' - y'$. Comme $z' - y' \in G$ (car $z', y' \in G$ et G est un s.e.v de E), $y - z \in G$. De plus, $y, z \in F$ et F est un s.e.v de E donc $y - z \in F$. Donc $y - z \in F \cap G$. Mais $F \cap G = \{0\}$. Donc $y - z = 0 \Rightarrow y = z$. Ainsi, $z' - y' = 0$ donc $z' = y'$. Par conséquent, l'écriture de x en fonction de y et y' est unique donc F et G sont en somme directe.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux s.e.v de E.
On dit que F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans E si pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que : $x = y + z$. On note : $F \oplus G = E$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux s.e.v de E.
Alors, F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

Remarque. Les deux définitions données ci-dessus peuvent être généralisées pour n (n est un entier naturel, $n \geq 3$) s.e.v de E. Attention : cela n'est pas le cas pour les deux propriétés !

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, F et G deux s.e.v de E.
Soient $B = (f_1, ..., f_p)$ une base de F et $B' = (g_1, ..., g_q)$ une base de G.
Alors, F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans E si et seulement si $B \cup B'$ est une base de E.

Démonstration. Sens direct : supposons que $F \oplus G = E$ et montrons que $B \cup B'$ est une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que : $x = y + z$. On a $y \in F$ et $B = (f_1, ..., f_p)$ est une base de F donc il existe un unique p-uplet de scalaires : $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $y = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$. De même, comme $z \in G$ et que $B' = (g_1, ..., g_q)$ est une base de G, il existe un unique q-uplet de scalaires : $(\mu_1, ..., \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que $z = \mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q$ donc on obtient $x = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q$ donc la famille $\{f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q\}$ est génératrice de E. Montrons maintenant que $B \cup B'$ est libre.
Soit $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q = 0 \Rightarrow \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q)$. Ainsi, $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p \in F \cap G$ et $F \cap G = \{0\}$ donc $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$ car B est libre. On a alors $\mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q = 0 \Rightarrow \mu_1 = ... = \mu_q = 0$ car B' est libre. Ainsi, $B \cup B'$ est libre. Par conséquent, $B \cup B'$ est une base de E.
Réciproquement, supposons que $B \cup B'$ est une base de E et montrons que $F \oplus G = E$. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$ donc il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, ..., \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que $x = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p = \mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q$ donc $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p - \mu_1 g_1 - ... - \mu_q g_q = 0$ donc $\lambda_1 = ... = \lambda_p = \mu_1 = ... = \mu_q = 0$ (car $B \cup B'$ est libre). Ainsi, $x = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$. Montrons maintenant que $F + G = E$. Il est clair que $F + G \subset E$. Montrons que $E \subset F + G$. Soit $x \in E$ alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, ..., \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que

$x = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q$. Or, $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p \in F$ et $\mu_1 g_1 + ... + \mu_q g_q \in G$. Donc $x \in F + G$ donc $E \subset F + G$. Ainsi, $E = F + G$. Par conséquent, $F \oplus G = E$.

Exercice 1. Soient $F = Vect\{(1,2)\}$ et $G = Vect\{(-1,1)\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 1. Il est clair que le vecteur $(1,2)$ forme une base de F et que le vecteur $(-1,1)$ forme une base de G. Montrons que les vecteurs $(1,2)$ et $(-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Montrons d'abord que les vecteurs $(1,2)$ et $(-1,1)$ forment une famille genératrice de $\mathbb{R}^2$. Pour cela, cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{3} \\ \beta = \dfrac{y-2x}{3} \end{cases}$. Ce qui prouve que tout vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire de la manière suivante : $(x,y) = \dfrac{x+y}{3}(1,2) + \dfrac{y-2x}{3}(-1,1)$ donc les vecteurs $(1,2)$ et $(-1,1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. De plus, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils sont libres. Donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$. Donc l'union des bases de F et de G forme une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

2) Projections et symétries.

Définitions. Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que F et G sont supplémentaires dans E. Alors pour tout x de E, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
1) On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par : si $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$ alors $p(x) = x_F$.
2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s définie par : $s(x) = x_F - x_G$.

Théorème. Les applications p et s définies précédemment sont des endomorphismes de E.

Démonstration. Soient x, $y \in E$ que l'on décompose sous la forme : $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Soient λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Comme p et s sont des applications de E dans E, il suffit de montrer qu'elles sont linéaires.
On a : $\lambda x + \mu y = \lambda x_F + \mu y_F + \lambda x_G + \mu y_G$ et $\lambda x_F + \mu y_F \in F$ et $\lambda x_G + \mu y_G \in G$. Donc $p(\lambda x + \mu y) = \lambda x_F + \mu y_F = \lambda p(x) + \mu p(y)$. Donc p est linéaire. On prouve de la même façon que s est linéaire.

Théorème. On reprend les notations de la définition. On a :
1) $p^2 = p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - id) = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$ où id est l'application linéaire identité.
2) $s^2 = id_E$, $\operatorname{Ker}(s - id) = F$, $\operatorname{Ker}(s + id) = G$.

Démonstration. Démontrons par exemple que l'on a : $\operatorname{Ker}(s - id) = F$.
Pour tout $x \in F$, on a : $s(x) = x$ donc $s(x) - x = 0$ ainsi, $(s - id)(x) = 0$ d'où $x \in \operatorname{Ker}(s - id)$. Donc $F \subset \operatorname{Ker}(s - id)$.
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(s - id)$. On décompose x sous la forme : $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On a $s(x) = x_F - x_G = x$ (car $x \in \operatorname{Ker}(s - id)$). Donc $x_F - x_G = x_F + x_G \Rightarrow x_G = 0$ donc $x = x_F \in F$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(s - id) \subset F$.

Exercice 2. Déterminer la projection sur $F = Vect\{(1,2)\}$ parallèlement à $G = Vect\{(-1,1)\}$ et la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Solution de l'exercice 2. On a démontré à l'exercice 1 que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
Soit p la projection sur F parallèlement à G. Tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se décompose d'une manière unique de la manière suivante : $(x,y) = \dfrac{x+y}{3}(1,2) + \dfrac{y-2x}{3}(-1,1)$ (voir exercice 1). Alors $p(x,y) = \dfrac{x+y}{3}(1,2) = \left(\dfrac{x+y}{3}, \dfrac{2(x+y)}{3}\right)$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $s(x,y) = \dfrac{x+y}{3}(1,2) - \dfrac{y-2x}{3}(-1,1) = \left(\dfrac{2y-x}{3}, \dfrac{y+4x}{3}\right)$.

II) Matrices.

1) Définitions et opérations sur les matrices.

Définition. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau de n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On note une telle matrice :

$$M = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On dit que M est une matrice colonne (ou vecteur colonne) si $p = 1$.
On dit que M est une matrice ligne (ou vecteur ligne) si $n = 1$.
On dit que M est une matrice carrée si $n = p$.

Notations. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $p = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.
Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite matrice carrée de taille n.
Soit $M = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ alors $a_{i,j}$ est le coefficient sur la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M.

Définitions. Soit $M = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que :
(1) M est une matrice triangulaire supérieure (resp. strictement supérieure) si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$ (resp. $i \geq j$). C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$).
(2) M est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure) si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$ (resp. $i \leq j$).
C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$).
(3) M est une matrice diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$. C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Définition. Soit $M = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de la matrice M, la matrice ${}^tM = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$. Les n lignes de M sont les n colonnes de ${}^tM$ et les p colonnes de M sont les p lignes de ${}^tM$.

Opérations sur les matrices.

1) Addition : Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la manière suivante : $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$.

Ainsi, $A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$.
Attention, on n'additionne des matrices que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes !
2) Multiplication par un scalaire : Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. Ainsi, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$.
3) Produit matriciel : Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par : $\forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq q$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.
Attention, pour que cette multiplication matricielle soit possible, il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B !

Propriété (admise). (1) Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$, on a : $(AB)C = A(BC)$.
(2) Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a : $(A+B)C = AC + BC$.
(3) Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a : $A(B+C) = AB + AC$.
(4) Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 & 1\times 0 + 2\times(-1) \\ -1\times 1 + 1\times 2 & -1\times 0 + 1\times 1 & -1\times 0 + 1\times(-1) \end{pmatrix}$
donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A + B$, $\frac{1}{2}A$ et CA. Est-il possible de calculer AC ?

Solution de l'exercice 3.
On a : $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Il est impossible de calculer le produit matriciel AC car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de C.

Exercice 4. Soient A et B deux matrices. On suppose que l'on peut calculer les produits AB et BA. Aura-t-on forcément $AB = BA$?

Solution de l'exercice 4. En général, on n'a pas $AB = BA$.
En effet, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $AB \neq BA$.

2) Matrices inversibles.

Définition-propriété. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$ où l'on a noté I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cette matrice B est unique, on dit qu'elle est l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Preuve de l'unicité de B. Supposons que A admette deux inverses : B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a : $AB =$

$BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$ donc $AB = AC \Rightarrow BAB = BAC \Rightarrow B = C$.

Exemple. La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Propriété. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(1) Si A et B sont inversibles alors (AB) est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(2) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Preuve.
(1) A et B sont inversibles et on a $(AB)B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}(AB) = I_n$ donc (AB) est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(2) A est inversible et on a : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ donc A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Définition. On note $GL(n)(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. $(GL(n)(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

Preuve. Déjà, le produit de deux matrices inversibles est inversible, d'après la propriété précédente. Ensuite, $I_n \in (GL(n)(\mathbb{K}), \times)$ et I_n est l'élément neutre de $(GL(n)(\mathbb{K}), \times)$ pour la loi $\times$, $\times$ est associative et chaque matrice $A \in (GL(n)(\mathbb{K}), \times)$ admet un unique inverse $A^{-1} \in (GL(n)(\mathbb{K}), \times)$. Donc $(GL(n)(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $A^2 - 5A = 2I_2$.
2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Solution de l'exercice 5.
1) On a : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$. De plus, $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $A^2 - 5A = 2I_2$.
2) Ainsi, $A(A - 5I_2) = 2I_2 \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right) = I_2$. Comme $A\left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right) = \left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right)A$, on a : $A\left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right) = \left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right)A = I_2$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.

3) Matrice d'une application linéaire.

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. Soient $B_E = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $B_F = (f_1, ..., f_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle matrice représentative dans les bases B_E et B_F de l'application linéaire f la matrice des composantes dans B_F de la famille image $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$. Concrètement, on calcule $f(e_1), ..., f(e_n)$ puis on les exprime en fonction des vecteurs de la base B_F et "on les met en colonnes". On note cette matrice : $Mat_{B_E,B_F}(f)$.

Etudions un exemple qui sera sans doute plus éclairant que la définition.

Exemple. Soit f l'application linéaire suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, x - y) \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique : $B = (e_1, e_2, e_3)$ ($e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$) et soit $C = (v_1, v_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ($v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$).
Déterminons la matrice de f dans les bases B et C.

On a : $f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (1, 1) = v_1 + v_2$,
$f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (2, -1) = 2v_1 - v_2$,

$f(e_3) = f((0,0,1)) = (-1,0) = -v_1 + 0 \times v_2$.

Donc $Mat_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Conséquence. On reprend les notations de la définition. Alors, les vecteurs colonnes de la matrice $Mat_{B_E,B_F}(f)$ engendrent $\operatorname{Im} f$ (i.e : ils forment une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$). Ceci donne alors une méthode très simple pour déterminer une base de l'image d'une application linéaire !

Remarque. On reprend les notations de la définition. Si $E = F$ alors f est un endomorphisme de E et on notera $\overline{Mat_{B_E}(f)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base B_E de E.

Exercice 6. Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) On rappelle que $B = (1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4.
Déterminer la matrice de f dans la base B.
3) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
4) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Solution de l'exercice 6.
1) f est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même donc il suffit de montrer qu'elle est linéaire pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Soient P, $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. Donc f est linéaire.
2) On a : $f(1) = 1$, $f(X) = X+1 = 1 \times 1 + 1 \times X$, $f(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = 1 \times X^2 + 2 \times X + 1 \times 1$, $f(X^3) = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. Donc la matrice de f dans la base B est : $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Les vecteurs colonnes de la matrice $Mat_B(f)$ forment une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Im} f = Vect\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+3X+3X^2+X^3\}$. De plus, les colonnes de $Mat_B(f)$ sont non nulles et cette matrice est triangulaire supérieure donc les vecteurs colonnes de cette matrice sont libres. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est de dimension 4 et les vecteurs colonnes de $Mat_B(f)$ forment une base de $\operatorname{Im} f$.
Par le théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
4) On a : $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective. De plus, $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ et $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$ donc f est surjective. Ainsi, f est bijective.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose : $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
1) Déterminer pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, l'expression $f(x,y,z)$.
2) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Ecrire la matrice de f dans la base B'.
4) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Solution de l'exercice 7.
1) A est la matrice de f dans la base canonique : $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Donc $f((1,0,0)) = 3 \times (1,0,0) + (-1) \times (0,1,0) + 1 \times (0,0,1) = (3,-1,1)$, $f((0,1,0)) = (1,1,1)$ et $f(0,0,1) = (-3,1,-1)$. Tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit : $u = x \times (1,0,0) + y \times (0,1,0) + z \times (0,0,1)$ donc $f(x,y,z) = f(x \times (1,0,0) + y \times (0,1,0) + z \times (0,0,1)) = x \times f(1,0,0) + y \times f(0,1,0) + z \times f(0,0,1)$ (par linéarité de f) donc

$f(x,y,z) = (3x+y-3z, -x+y+z, x+y-z)$. On remarque qu'en fait, $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2) Montrons que B' est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Prenons alors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et cherchons α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $(x,y,z) = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha+\beta+\gamma \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = y+x-z \\ \beta = x - z \\ \gamma = -y-x+2z \end{cases}$. Ainsi, tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit : $(x,y,z) = (y+x-z)(1,1,1) + (x-z)(1,-1,0) + (2z-y-x)(1,0,1)$. Donc B' est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Montrons maintenant que B' est libre. Soit $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$. Donc B' est libre. Ainsi, B' est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) On rappelle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x+y-3z, -x+y+z, x+y-z)$. Donc on a :
$f(1,1,1) = (3+1-3, -1+1+1, 1+1-1) = (1,1,1) = 1 \times (1,1,1)$.
$f(1,-1,0) = (3-1, -1-1, 1-1) = (2,-2,0) = 2 \times (1,-1,0)$.
$f(1,0,1) = (3-3, -1+1, 1-1) = (0,0,0)$.
Donc $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) L'image de toute base de $\mathbb{R}^3$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc $\{f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Ainsi, $\operatorname{Im} f = Vect\{f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\} = Vect\{(1,1,1), (2,-2,0), (0,0,0)\} = Vect\{(1,1,1), (1,-1,0)\}$. De plus, les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,-2,0)$ sont non colinéaires donc ils sont libres. Ainsi, ces deux vecteurs forment une base de $\operatorname{Im} f$ (et alors $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$).
Par le théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 2 = 1$. Donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans $\operatorname{Ker} f$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker} f$. Comme $f((1,0,1)) = (0,0,0)$, $(1,0,1) \in \ker f$ et $(1,0,1) \neq (0,0,0)$ donc le vecteur $(1,0,1)$ forme une base de $\ker f$.