Séance du 16 Mai - Groupe avancé : Réduction des endomorphismes.

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires, on considérera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
De plus, espace vectoriel sera abrégé e.v. et sous-espace vectoriel sera abrégé : s.e.v.

1 Introduction et motivation.

Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$.

A ce stade du cours, nous sommes capables (c'est le programme de spécialité maths de Terminale S) de définir un vecteur $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et d'écrire que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons aussi démontrer (grâce à une récurrence immédiate) que : $U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le problème est donc le calcul de A^n. Dans certains exercices, on peut calculer les puissances successives de la matrice pour arriver à conjecturer une expression de A^n puis nous démontrons par récurrence notre conjecture. L'objectif de ce cours est de donner une méthode générale pour trouver A^n et qui fonctionne si la matrice A vérifie une condition particulière...

2 Déterminant d'une matrice.

Définition : déterminant d'une matrice 2×2.

Le déterminant de la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est le nombre réel noté $\det(A)$ tel que : $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.
On note aussi : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

Exemple. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Que remarquez-vous ?

On a : $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 1\times(-2) = 6+2 = 8$ et $\det(B) = 2-(-1)\times(-2) = 0$. On remarque qu'un déterminant est nul et que c'est celui de la matrice B dont les colonnes sont liées.

Remarque. Attention, le déterminant ne concerne que des matrices carrées !

Déterminant d'une matrice 3×3 et généralisation.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est $\det(A) = a_{1,1} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$.

Ici, on a développé par rapport à la première ligne. On aurait pu développer par rapport à une autre ligne ou par rapport à une colonne.
Cette méthode de calcul des déterminants est généralisable aux matrices $n\times n$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Exemple. Calculer de deux manières différentes le déterminant de la matrice :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On a : $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -17+13 = -4$ en développant par rapport à la première ligne.
En développant par rapport à la première colonne, on a : $\det(A) = -3\times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -9+5 = -4$.

Propriétés du déterminant (admises). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$).

(1) Si toutes les lignes ou les colonnes de A sont nulles alors $\det(A) = 0$.
(2) Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnelles alors $\det(A) = 0$. Plus généralement, si les lignes de A ou les colonnes de A sont liées alors $\det(A) = 0$.

(3) Si l'on permute toutes les lignes et les colonnes pour calculer $\det(A)$ alors $\det(A)$ est inchangé. On a : $\det(A) = \det({}^tA)$.
(4) Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes pour calculer $\det(A)$, alors on change le signe de ce déterminant.
(5) Si chaque élément d'une ligne ou d'une colonne de A est multiplié par un scalaire k alors le déterminant de A est multiplié par k.
(6) En ajoutant à une ligne un multiple d'une autre, on ne change pas le déterminant.
(7) Soit B une matrice carrée de taille n, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Remarque. La propriété (6) est quasiment toujours utilisée pour les matrices de taille supérieure ou égale à 3 pour faire apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne.

Exercice 1. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 1.

$\det(A) = 5$, $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ en remplaçant la deuxième ligne par la deuxième ligne moins deux fois la première.
Donc $\det(B) = -4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \times (-3) = 12$.
On a : $\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -10 \end{vmatrix}$ en remplaçant la première colonne par la somme des colonnes.
Ainsi, $\det(C) = -5 \times \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = 160$.

3 Rappels d'algèbre linéaire.

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si :
1) $\forall\, x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2) $\forall\, x \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
On note $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Les points 1 et 2 de la définition peuvent être fusionnés en un seul : on dit que f est linéaire si : $\forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Définitions. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
1) On dit que f est surjective si $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
2) On dit que f est injective si $\forall\, x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
3) On dit que f est bijective si f est injective et surjective.

Vocabulaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une application linéaire de E dans lui-même est appelée : endomorphisme de E.
Une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels est un isomorphisme.
Un endomorphisme de E bijectif est un automorphisme de E.

Propriété-définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle image de f le s.e.v de F : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x), x \in E\}$.

Propriété-définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle noyau de f le s.e.v de E : $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

Propriété.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
1) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
2) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Preuves : laissées en exercice.

Définitions. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1) On dit qu'une famille $F = \{e_1, ..., e_n\}$ de vecteurs de E est une famille génératrice de E si tous les vecteurs de E peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille F, i.e : $\forall\, x \in E, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
2) On dit qu'une famille $F = \{e_1, ..., e_n\}$ de vecteurs de E est une famille libre si on a : $\forall\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. On dit que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont linéairement indépendants.
3) On dit qu'une famille $B = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Définition. Etant donné E : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, le nombre d'éléments de chacune des bases de E est appelé : dimension de E. On note $\dim E$ la dimension de l'espace vectoriel E.

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. Soient $B_E = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $B_F = (f_1, ..., f_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle matrice représentative dans les bases B_E et B_F de l'application linéaire f la matrice des composantes dans B_F de la famille image $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$. Concrètement, on calcule $f(e_1), ..., f(e_n)$ puis on les exprime en fonction des vecteurs de la base B_F et "on les met en colonnes". On note cette matrice : $Mat_{B_E,B_F}(f)$.

Etudions un exemple qui sera sans doute plus éclairant que la définition.

Exemple. Soit f l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y - z, 3x - y) \end{array}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique : $B = (e_1, e_2, e_3)$ ($e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$) et soit $C = (v_1, v_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ($v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$).
Déterminons la matrice de f dans les bases B et C.

On a : $f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (2, 3) = 2v_1 + 3v_2$,
$f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (-1, -1) = -v_1 - v_2$,
$f(e_3) = f((0, 0, 1)) = (-1, 0) = -v_1 + 0 \times v_2$.
Donc $Mat_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Conséquence. On reprend les notations de la définition. Alors, les vecteurs colonnes de la matrice $Mat_{B_E,B_F}(f)$ engendrent $\operatorname{Im} f$ (i.e : ils forment une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$) car l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Ceci donne alors une méthode très simple pour déterminer une base de l'image d'une application linéaire !

Remarque. On reprend les notations de la définition. Si $E = F$ alors f est un endomorphisme de E et on notera $Mat_{B_E}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base B_E de E.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Solution de l'exercice 2.

Sens direct : supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et montrons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
Soit alors $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Donc $x \in \operatorname{Im} f$ et $x \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi, il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$ et $f(x) = 0$.

Donc $f(f(y)) = f(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Or, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi, $f(y) = 0$ ce qui prouve que $x = 0$. Donc on a montré : $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \subseteq \{0\}$. L'autre inclusion étant claire, on a : $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
Réciproque : supposons que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ et montrons que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
1ère inclusion : soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors, $f(x) = 0$ donc $f^2(x) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2$. Cette première inclusion est vraie pour toute application linéaire.
2ème inclusion : soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $f^2(x) = 0$ donc $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$. De plus, $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$. Or, $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Ainsi, $f(x) = 0$ d'où $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Conclusion : $\mathrm{Ker}\, f^2 \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.
Finalement, on a bien : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

4 Valeurs propres et vecteurs propres.

Pour toute la suite du cours, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f est un endomorphisme de E.

Définition. Un vecteur $u \in E$ est un vecteur propre de f si :
1) $u \neq 0$.
2) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(u) = \lambda u$.
Le scalaire λ est appelé valeur propre associée à u.

Remarque. Si u est un vecteur propre de f, alors, par linéarité de f, αu est un vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.

Définition. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. On écrit : $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Théorème. L'endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Démonstration. Si f est diagonalisable alors il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ de E dans laquelle la matrice M de f est diagonale. On écrit : $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

et on constate alors que pour tout entier $i \in \{1, ..., n\}$, $f(e_i) = a_{i,i}e_i$. Donc tous les e_i ($i \in \{1, ..., n\}$) sont des vecteurs propres de f. Réciproquement, s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f alors il est clair que la matrice de f dans cette base est diagonale.

Remarque. Si f est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice représentant f dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres associées.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On pose pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 2y + z, x - 2y)$.

1) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que 1 est une valeur propre de f et déterminer tous les vecteurs propres associés à cette valeur propre.
3) Que représente le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{Ker}(f - id)$?

Solution de l'exercice 3.

1) On calcule $f((1, 0, 0))$, $f((0, 1, 0))$ et $f((0, 0, 1))$ et on en déduit la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée A : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
2) On cherche les vecteurs $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que : $f(u) = u$.
$f(u) = u \Leftrightarrow (x, 2y + z, x - 2y) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y + z = y \\ x - 2y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = -x \end{cases}$. Donc tous les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont de la forme : $(x, x, -x)$ où $x \in \mathbb{R}$.
3) Le s.e.v. $\mathrm{Ker}(f - id)$ représente l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E tel que : $f^2 = -id$. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles.

Solution de l'exercice 4. Soit λ une valeur propre de f. Alors, il existe $x \neq 0$ tel que : $f(x) = \lambda x$. Donc $f(f(x)) = f(\lambda x)$ ainsi, $f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$. De plus, $f^2 = -id$ donc $f^2(x) = -x$. Ainsi, $\lambda^2 x = -x$. Ce qui nous donne : $(\lambda^2 + 1)x = 0$ donc (comme $x \neq 0$) $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, $\lambda \notin \mathbb{R}$.

5 Polynôme caractéristique.

Propriété-définition. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f de E (E étant un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie) est l'ensemble des racines du polynôme : $P_f(X) = \det(f - Xid)$. Ce polynôme de degré n est appelé polynôme caractéristique de f.

Preuve. Soit λ une valeur propre de f. Alors il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que : $f(x) = \lambda x$. Donc on a : $(f - \lambda id)(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id)$. On a alors prouvé qu'il existe un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \lambda id)$ donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda id) \neq 0$ donc $f - \lambda id$ n'est pas injective. Ainsi, $f - \lambda id$ n'est pas bijective d'où $\det(f - \lambda id) = 0$. Par conséquent, λ est racine de $P_f(X)$.
Réciproquement, supposons que λ est racine de $P_f(X)$. Alors $\det(f - \lambda id) = 0$ donc $f - \lambda id$ n'est pas bijective. Comme $f - \lambda id$ est un endomorphisme de E non bijectif, on en déduit qu'il n'est pas injectif (car s'il était injectif on aurait la surjectivité par le théorème du rang). Donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda id) \neq 0$ ainsi, il existe un vecteur $x \in E$ non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \lambda id)$. Donc on a montré qu'il existe $x \neq 0$ (et $x \in E$) tel que : $(f - \lambda id)(x) = 0$ d'où $f(x) = \lambda x$ donc λ est valeur propre de f.
Enfin, on montre par récurrence sur n que le polynôme caractéristique est de degré n.

Remarque. Si A et B sont deux matrices représentant un même endomorphisme dans deux bases distinctes alors elles sont semblables donc $\det(A - XI) = \det(B - XI)$ (où I est la matrice identité). On appelle également polynôme caractéristique de A le polynôme $\det(A - XI)$.

Définition. On dit qu'une valeur propre de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f. Autrement dit, si λ est une valeur propre de f alors la multiplicité de λ est l'exposant : α du polynôme $X - \lambda$ en tant que facteur du polynôme caractéristique.

Exercice 5. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et en déduire ses valeurs propres.

Solution de l'exercice 5.

On a : $\det(A - XI) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ -3 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (2 - X) \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = -(2 - X)(1 - X)(1 + X)$. Donc les valeurs propres de A sont 2, 1 et -1.

6 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

Propriété-définition. Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f de E. On appelle espace-propre associé à la valeur propre λ le s.e.v. de E : $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.

Preuve. Il faut montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$ est un s.e.v. de E. La preuve est laissée en exercice.

Propriété. Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f de E. Alors l'espace propre associé à la valeur propre λ : E_λ est stable par f (i.e : $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$).

Preuve. Soit $y \in f(E_\lambda)$. Alors, il existe $x \in E_\lambda$ tel que : $f(x) = y$. Comme $x \in E_\lambda$, $f(x) = \lambda x$. Donc $y = \lambda x$. Ainsi, $f(y) = \lambda f(x) = \lambda y$ donc $y \in E_\lambda$. Ainsi, E_λ est stable par f.

Remarque. Si λ n'est pas valeur propre de f alors $E_\lambda = \{0\}$. Si λ est valeur propre de f alors $\dim E_\lambda \geq 1$.

Rappel. Soient F et G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On dit que F et G sont en somme directe si tout élément x de $F + G$ se décompose d'une manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On note la somme directe : $F \oplus G$.
Ceci est généralisable à n sous-espaces vectoriels de E.

Propriété. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires distincts deux à deux. Alors, les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence sur p. Si $p = 1$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons que les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ soient en somme directe et montrons que les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_{p+1}}$ sont aussi en somme directe. Pour cela, il suffit de montrer que $(E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}} = \{0\}$. Soit $x \in (E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$. On a $f(x) = \lambda_{p+1} x$ car $x \in E_{\lambda_{p+1}}$.
Comme $x \in E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_p}$, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, ..., x_p \in E_{\lambda_p}$ tels que : $x = x_1 + ... + x_p$. On a donc également, $f(x) = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$. Ainsi, on obtient :
$0 = (\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + ... + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p$. Or, les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe donc pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $(\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = 0$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, on en déduit que pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $x_i = 0$ donc $x = 0$.

Corollaire. L'endomorphisme f (de E) est diagonalisable si et seulement si E (E : $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n) est somme directe de ses sous-espaces propres.

Démonstration. On suppose que f est diagonalisable. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f et $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés. Alors, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Montrons que E est somme directe des espaces-propres. Soit $x \in E$. Alors il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. Comme les e_i sont des vecteurs propres de f et que les espaces propres sont en somme directe, on a : $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\exists !\, j \in \{1, ..., p\}$, $e_i \in E_{\lambda_j}$. Donc $x \in E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$. Donc E est somme directe des sous-espaces propres.
Réciproquement, si E est somme directe des sous-espaces propres, alors l'union des bases des sous-espaces propres est une base de E ainsi, E admet une base formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable.

Propriété. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie. Soit λ une valeur propre de f de multiplicité α. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $\dim E_\lambda \geq \alpha + 1$. Soient $u_1, ..., u_{\alpha+1}$ des vecteurs linéairement indépendants de E_λ. Complétons cette famille en une base $\mathscr{B}$ de E. On a : $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_{\alpha+1} & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$.
Donc $P_f(X) = \det((\lambda - X) I_{\alpha+1}) \det(B - X I_{n-\alpha-1}) = (\lambda - X)^{\alpha+1} \det(B - X I_{n-\alpha-1})$.
Ainsi, λ serait une valeur propre de multiplicité strictement supérieure à α. Ce qui est absurde.

Théorème fondamental de diagonalisation. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie n. Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :
1. Le polynôme caractéristique de f : $P_f(X)$ est scindé : il se factorise en un produit de polynômes du premier degré (non nécessairement distincts) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
2. Pour chaque valeur propre de f, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre.

Démonstration. Supposons que f soit diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de f.
Il existe donc une base de E formée de vecteurs propres de f. On obtient dans cette base une matrice diagonale de la forme : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$ où m_k est la dimension de E_{λ_k}. En calculant le polynôme caractéristique de f à partir de cette matrice, on a : $P_f(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (\lambda_k - X)^{m_k}$. Cela prouve à la fois que $P_f(X)$ est scindé et

que la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.
Réciproquement, supposons que l'on ait les conditions 1 et 2 du théorème et montrons que f est diagonalisable.
La première hypothèse peut être traduite par : $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{n_{\lambda_1}}...(X-\lambda_r)^{n_{\lambda_r}}$ où les éléments $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de f et n_{λ_k} est la multiplicité de la valeur propre λ_k.
Puisque le degré du polynôme caractéristique de f est égal à la dimension de E : n, on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{r} n_{\lambda_k} = n$.
Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a (propriétés de la dimension d'une somme directe) : $\dim(E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dim E_{\lambda_k}$ et donc par la deuxième hypothèse, $\dim(E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}) = \sum\limits_{k=1}^{r} n_{\lambda_k} = n$. Donc $E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$ est un sous-espace vectoriel de E qui a même dimension que E donc il est égal à E. Ainsi, f est diagonalisable.

Remarque importante. En fait, si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est diagonalisable alors, en notant A sa matrice dans une base $\mathscr{B}$, il existe une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$. On aura alors (par une récurrence triviale) : $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n. La matrice P est appelée matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres de f. La matrice P est obtenue en mettant les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs propres de A en colonnes.
Attention : de l'ordre des vecteurs propres de la base $\mathscr{B}'$ dépend l'ordre des coefficients diagonaux de la matrice D et réciproquement.

7 Retour au problème initial.

Exemple. Revenons au problème initial. Cet exemple servira de méthode générale pour montrer qu'une matrice est diagonalisable et pour la diagonaliser.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Etape 1 : On calcule le polynôme caractéristique (noté $P_A(X)$) de A et on en déduit les valeurs propres de A :
$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(-1-X) - 1 = -(1-X)(1+X) - 1 = -(1-X^2) - 1 = X^2 - 2$. Donc les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(X)$: $\sqrt{2}$

et $-\sqrt{2}$, chacune de multiplicité 1 (donc on peut tout de suite déduire que chaque espace propre est de dimension 1 : on va voir une autre méthode pour le démontrer).
Etape 2 : On détermine l'espace propre associé à chaque valeur propre.
On a : $A-\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On remarque que la première colonne de la matrice $A-\sqrt{2}I$ est la deuxième colonne de A multipliée par $(1-\sqrt{2})$. Donc on a : $(A-\sqrt{2}I)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (A-\sqrt{2}I)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1-\sqrt{2})$ donc $(A-\sqrt{2}I)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - (1-\sqrt{2})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\sqrt{2}$. On aurait pu aussi résoudre le système : $Au = \sqrt{2}u$ où $u = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour trouver l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Les deux colonnes de la matrice $A-\sqrt{2}I$ sont non nulles et proportionnelles donc cette matrice est de rang 1. Donc par le théorème du rang, l'espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$ est de dimension 1. De même on trouve un vecteur propre associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$: $\begin{pmatrix}1\\ -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de A est scindé et la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée. Donc A est diagonalisable. Donc il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.
On a $D = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Etape 3 : on trouve la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et son inverse : $P^{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$.
Ceci nous donne : $A^n = PD^nP^{-1}$ et nous permet de trouver l'expression des suites (a_n) et (b_n) !