Théorie des groupes

Salim TAYOU

28 novembre 2014

Exercice 1

Montrer que les ensembles suivants sont des groupes quand on les munit des lois suivantes :
$\{\alpha + \beta\sqrt{2}/(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2/(0,0)\ \}$ muni de la multiplication induite par celle sur $\mathbb{R}$
L'ensembles des rotations de $\mathbb{C}$ muni de la composition.

Exercice 2

Montrer que les sous groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec n entier naturel.
Montrer qu'un sous groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense soit de la forme $a\mathbb{R}$ avec a réel positif ou nul.

Exercice 3

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 4

Soit $(G, .)$ un groupe tel que $\forall a \in G \quad a^2 = 1$
Prouver que G est commutatif.

Exercice 5

Démontrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ vers $(\mathbb{Q}^*, .)$.
Même question de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^*, .)$.
Expliciter un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^{*+}, .)$.

Exercice 6

On dit que G est p-groupe si le cardinal de G est une puissance d'un nombre premier p.
Donner des exemples de p-groupes, commutatifs et non-commutatifs.
Si G est de cardinal p. Montrer que G est cyclique.

Exercice 7

Soient des groupes $H \subset K \subset G$.
Prouver que le quotient de G/H par K/H est isomorphe à G/K.

Exercice 8

Soit G un groupe. On note $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G x.y = y.x\}$ appelé centre de G (Zentrum !).
Vérifier que $Z(G)$ est un sous groupe de G, distingué dans G.

Exercice 9

Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est cyclique, montrer que G est abélien.

Exercice 10

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le centre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est trivial.

Exercice 11

Soit G un groupe. On définit $D(G) =< xyx^{-1}y^{-1} / x, y \in G >$ appelé groupe dérivé de G. Vérifier que c'est un sous groupe de G, distingué et que le quotient est abélien.

Exercice 12 (Formule des classes)

Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X.
Montrer qu'il existe un ensemble fini R de X tel que :

$$|X| = \sum_{x \in R} [G : G_x]$$

où G_x est le stabilisateur de x.

Exercice 13

Soit p un nombre premier.
On fait agir un p-groupe G sur un ensemble X. On note

$$X^G = \{x \in X / \forall g \in G g.x = x\}$$

l'ensembles des points fixes de l'action de G. Montrer que $|X| \equiv |X^G| \pmod p$.

Exercice 14

Monter que tout groupe fini s'injecte dans un groupe de permutation.

Exercice 15 (Lemme de Cauchy)

Soit G un groupe fini et p nombre premier divisant $|G|$. Le but de l'exercice est montrer qu'il existe un élément de G d'ordre p.
Soit $X = \{(g_1, ..., g_p) \in G^p / g_1..g_p = 1\}$
Construire une action convenable de S_p sur X et utiliser la formule des classes pour obtenir le résultat.

Exercice 16

Soit G un groupe non trivial et H sous groupe de G d'indice le plus petit facteur premier de G.
Montrer que H est distingué.

Exercice 18

Montrer que tout groupe d'ordre le carré d'un nombre premier est commutatif.

Exercice 19

Soit p un nombre premier. Démontrer qu'un p-groupe a un centre non trivial.

Exercice 20

Déterminer tous les groupes d'ordre 6.
Démontrer qu'à isomorphisme près, $\mathcal{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60.